

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF-M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par

-Nadji Hamada

THÈME

**Continuité de certains opérateurs pseudo-différentiels
sur les espaces Herz-type-Besov-Triebel-Lizorkin**

Soutenu publiquement le : 30/06/ 2019

Devant le jury composé de :

- 1)Mr. Moussai Madani Prof. Univ de M'sila Président**
- 2)Mr. Drihem Douadi Prof. Univ de M'sila Encadreur**
- 3)Mr. Lakhal Aissa MAA. Univ de M'sila Examineur**

Dirigé par :

Mr. Drihem Douadi

Année : 2018/2019

Remerciements

Avant tout nous remercions **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclairé notre vie, renforcé notre courage et notre volenté pour finir ce travail. Nous tenons à remercier particulièrement notre encadreur Mr. **Drihem Douadi**, pour toute l'aide qu'il nous a apporté et sa patience ses conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Nous tenons à remercier aussi Mr. **Moussai Madani**, d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. Nous tenons à remercier Mr. **Lakhal Aissa**, pour avoir accepté d'examiner notre mémoire. Nos remerciements s'adressent également à tout les enseignants du département de mathématiques pour leurs dévouement et leurs générosité. Nous tenons ici à exprimer nos sentiments respectueux à nos chers parents à qui nous dédions ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à nos familles, à nos proches et à nos collègues pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

Merci

Table des matières

Introduction	1
Notation	3
1 L'espace de Herz type Besov-Triebel-Lizorkin	6
1.1 L'espace de Herz	6
1.2 Inégalité Plancherel-Polya-Nikolskij	7
1.3 Les espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p}B_\beta^s$ et $\dot{K}_q^{\alpha,p}F_\beta^s$	9
2 Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces $\dot{K}_p^{\alpha,q}B_\beta^s$	14
2.1 Résultats auxiliaires	15
2.2 Principaux résultats	20
3 Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces $\dot{K}_p^{\alpha,q}F_\beta^s$	28
3.1 Résultats auxiliaires	29
3.2 Principaux résultats	31
Références	38

Introduction

Un opérateur différentiel est un opérateur de la forme :

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a(x) (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha,$$

avec $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Si on pose $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a(x) \xi^\alpha$ on obtient

$$a(x, D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \mathcal{F}f(\xi) d\xi,$$

où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, à une fonction $a(x, \xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ (qu'on appellera alors symbole) on associe un opérateur $a(x, D)f$, dit opérateur pseudo-différentiel, par :

$$a(x, D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

Dans ce mémoire, nous sommes intéressés d'étudier la continuité de certains opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Herz-type Besov-Triebel-Lizorkin.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques propriétés des espaces de Herz et Herz-type Besov et Triebel-Lizorkin et quelques résultats qu'on utilisera par la suite. Plus précisément, on donne la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution

tempérée. On donne quelques inégalités nécessaires pour ce travail, comme l'inégalité de Plancherel-Polya-Nikolskij.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Herz-type Besov.

Enfin, dans le troisième chapitre on s'intéresse à la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Herz-type Triebel-Lizorkin.

Notation

- \mathbb{N} : la collection de tous les nombres naturels.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- \mathbb{Z} : l'ensemble de tous les nombres entiers.
- \mathbb{R}^n : l'espace Euclidien.
- \mathbb{C} : l'ensemble des nombres complexes.
- $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ la classe des fonctions indéfiniment différentiables.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissances rapides ou la classe de

Schwartz.

- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
- On définit la transformation de Fourier par :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

et sa transformée de fourier inverse est :

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi.$$

• Soient $0 < p \leq \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue des fonctions mesurables f telle que :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < p < \infty \\ \sup_{\text{ess}} |f(x)| & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$ et $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p$.

• ℓ^q est l'espace de suites $(a_k)_k$ telle que :

$$\|(a_k)_k\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{1/q} < \infty.$$

• Soient $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$, alors $\ell^q(L^p)$ est l'espace de suites de fonctions $\{f_k\}_k \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\|\{f_k\}_k\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p^q \right)^{1/q} < \infty.$$

• p' est l'exposant conjugué de p ou $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

• Soient X et Y deux espaces quasi-normés, on dit que $X \hookrightarrow Y$ s'il existe $c > 0$ telle que :

$$\|f\|_Y \leq c \|f\|_X, \quad \forall f \in X.$$

• Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ $\text{supp } f$ est le support de f

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}.$$

• $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

• $f \in L_1^{loc} : f$ localement intégrable.

- $f * g(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y)g(y)dy$ est la convolution de f et g .
- χ_E est la fonction caractéristique sur $E \subset \mathbb{R}^n$.
- $\eta_{v,m}(x) = 2^{nv}(1 + 2^v |x|)^{-m}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{N}_0$ et $m > 0$.

Chapitre 1

L'espace de Herz type Besov-Triebel-Lizorkin

Il est bien connu que les espaces fonctionnels jouent un rôle important dans l'analyse harmonique et les équations aux dérivées partielles. Notre objectif est de présenter quelques résultats pour les espaces Herz type Besov-Triebel-Lizorkin.

1.1 L'espace de Herz

L'objet de ce section est de rappeler les notions essentielles pour les espaces de Herz qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire. On pose

$$B_k := B(0, 2^k), \quad R_k := B_k \setminus B_{k-1} \quad \text{et} \quad \chi_k = \chi_{R_k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.1.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq p, q \leq \infty$. L'espace de Herz homogène $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ est définie par*

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

telle que

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_q^p \right)^{1/p} < \infty,$$

avec une petite modification si $p = \infty$ et/ou $q = \infty$.

Remarque 1.1.1 Les espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces quasi-Banach et si $\min(p, q) \geq 1$ alors $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Banach. Si $\alpha = 0$ et $0 < p = q \leq \infty$ alors $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec les espaces de Lebesgue L^p . Si $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors on peut en déduire l'inclusion.

$$\dot{K}_q^{\alpha,p_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p_2}(\mathbb{R}^n).$$

On trouvera une discussion détaillée des propriétés de ces espaces dans [16].

1.2 Inégalité Plancherel-Polya-Nikolskij

Cette inégalité joue un rôle important dans la théorie des espaces fonctionnels et les équations aux dérivées partielles. Notre objectif est d'étudier ce résultat aux espaces de Herz. Commençons par le lemme suivant.

Lemme 1.2.1 Soit $r, R > 0$ et $m > n$. Il existe $c = c(r, m, n) > 0$ tel que pour tout $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \mathcal{F}g \subset \bar{B}(0, R)$ nous avons

$$|g(x)| \leq c(\eta_{R,m} * |g|^r(x))^{1/r}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'inégalité classique de Plancherel-Polya-Nikolskij voir [23], dit que $\|f\|_q$ peut être estimé par

$$c R^{n(1/p-1/q)} \|f\|_p,$$

pour tout $0 < p \leq q \leq \infty$, $R > 0$ et tout $f \in L^p \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \mathcal{F}f \subset \bar{B}(0, R)$. La constante $c > 0$ est indépendante de \mathbb{R} .

Lemme 1.2.2 *Soit $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ et $0 < s, p, q, r \leq \infty$. On suppose que $\alpha_1 + n/s > 0$, $0 < q \leq s \leq \infty$ et $\alpha_2 \geq \alpha_1$, alors il existe une constante positive $c > 0$ indépendante de \mathbb{R} telle que pour tout $f \in \dot{K}_q^{\alpha_2, p}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \mathcal{F}f \subset \bar{B}(0, R)$ nous avons*

$$\|f\|_{\dot{K}_s^{\alpha_1, r}(\mathbb{R}^n)} \leq c R^{n/q - n/s + \alpha_2 - \alpha_1} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2, \theta}(\mathbb{R}^n)},$$

où

$$\theta = \begin{cases} r & \text{si } \alpha_2 = \alpha_1 \\ p & \text{si } \alpha_2 > \alpha_1 \end{cases}.$$

Remarque 1.2.1 *Nous voudrions mentionner que le lemme précédent généralise le classique Plancherel-Polya-Nikolskij $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $r = s$ et en utilisant $\ell_q \hookrightarrow \ell_s$. Dans le lemme précédent, nous n'avons pas traité le cas $s \leq q$. Le lemme suivant donne une réponse positive.*

Lemme 1.2.3 *Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $0 < s, p, q, r \leq \infty$. On suppose que $\alpha_1 + n/s > 0$, $0 < s \leq q \leq \infty$ et $\alpha_2 \geq \alpha_1 + n/s - n/q$ alors il existe une constante positive $c > 0$ indépendante de \mathbb{R} telle que pour tout $f \in \dot{K}_q^{\alpha_2, p}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \mathcal{F}f \subset \bar{B}(0, R)$ nous avons*

$$\|f\|_{\dot{K}_s^{\alpha_1, r}(\mathbb{R}^n)} \leq c R^{n/q - n/s + \alpha_2 - \alpha_1} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha_2, p}(\mathbb{R}^n)}.$$

1.3 Les espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s$ et $\dot{K}_q^{\alpha,p} F_\beta^s$

Définition 1.3.1 Soit une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant $\Psi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\Psi(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$. On pose

$$\varphi_0(x) = \Psi(x), \quad \varphi_1(x) = \Psi(x/2) - \Psi(x)\varphi_1(x) = \varphi_1(2^{-j+1}x) \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots$$

En suite, nous avons

$$\text{supp} \varphi_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 3 \cdot 2^{j-1}\},$$

$$\varphi_j(x) = 1 \quad \text{pour } 3 \cdot 2^{j-2} \leq |x| \leq 2^j \quad \text{et}$$

$$\Psi(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) = 1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le système de fonction $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ s'appelle résolution de l'unité. Nous définissons les opérateurs de convolution Δ_j par :

$$\Delta_j f = \mathcal{F}^{-1} \varphi_j * f, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \Delta_0 f = \mathcal{F}^{-1} \Psi * f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

On obtient ainsi la décomposition de Littlewood-Paley

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f,$$

pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (convergence en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

Définition 1.3.2 (i) Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, \beta \leq \infty$. L'espace de Besov $B_{p,\beta}^s$ est l'ensemble des tous $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|f\|_{B_{p,\beta}^s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} \|\Delta_j f\|_p^\beta \right)^{1/\beta} < \infty,$$

avec une petite modification si $\beta = \infty$.

(ii) Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$ et $0 < \beta \leq \infty$. L'espace de Triebel-Lizorkin $F_{p,\beta}^s$ est l'ensemble de tous les $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|f\|_{F_{p,\beta}^s} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} |\Delta_j f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_p < \infty,$$

avec une petite modification si $\beta = \infty$.

La théorie des espaces $B_{p,q}^s$ et $F_{p,\beta}^s$ a été développée en détail dans [23]. Si $p = q = \infty, s > 0$, on récupère les espaces de Hölder-Zygmund $C^s = B_{\infty,\infty}^s$.

Définition 1.3.3 (i) Soient $\alpha, s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q, \beta \leq \infty$. L'espace Herz-type Besov $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s$ est l'ensemble de tous les $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} \|\Delta_j f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}^\beta \right)^{1/\beta} < \infty,$$

avec une petite modification si $\beta = \infty$.

(ii) Soient $\alpha, s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q < \infty$ et $0 < \beta \leq \infty$. L'espace Herz-type Triebel-Lizorkin type $\dot{K}_q^{\alpha,p} F_\beta^s$ est l'ensemble de tous les $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p} F_\beta^s} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} |\Delta_j f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

avec une petite modification si $\beta = \infty$.

Pour plus de details sur ces espaces voir [26], [27], [28], [29] et [30]. Pour $s \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty$ ($0 < p < \infty$ pour l'espaces $\dot{K}_p^{0,p} F_\beta^s$) et $0 < \beta \leq \infty$ on a

$$\dot{K}_p^{0,p} B_\beta^s = B_{p,\beta}^s \quad \text{et} \quad \dot{K}_p^{0,p} F_\beta^s = F_{p,\beta}^s.$$

Théorème 1.3.1 Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$ et $\alpha > -n/q$.

(i) Si $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_1}^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_2}^s \quad \text{et} \quad \dot{K}_q^{\alpha,p} F_{\beta_1}^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} F_{\beta_2}^s.$$

(ii) Si $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \infty$ et $\varepsilon > 0$, alors

$$\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_1}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\beta_2}^s \quad \text{et} \quad \dot{K}_q^{\alpha,p} F_{\beta_1}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} F_{\beta_2}^s.$$

(iii) Si $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_q^{\alpha,p_1} B_\beta^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p_2} B_\beta^s \quad \text{et} \quad \dot{K}_q^{\alpha,p_1} F_\beta^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p_2} F_\beta^s.$$

(iv) Si $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p} B_\beta^s \hookrightarrow \dot{K}_{q_1}^{r,p} B_\beta^s \quad \text{et} \quad \dot{K}_{q_2}^{\alpha,p} F_\beta^s \hookrightarrow \dot{K}_{q_1}^{r,p} F_\beta^s,$$

où $r = \alpha - n(1/q_1 - 1/q_2)$.

Le théorème suivant donne des inclusions de base pour les espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s$ et $\dot{K}_q^{\alpha,p} F_\beta^s$.

Théorème 1.3.2 Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q < \infty, 0 < \beta \leq \infty$ et $\alpha > -n/q$. On a

$$\dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\min(\beta,p,q)}^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} F_\beta^s \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} B_{\max(\beta,p,q)}^s.$$

Théorème 1.3.3 (i) Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q, \beta \leq \infty$ et $\alpha > -n/q$. L'espace de Herz type Besov $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s$ est un espace quasi-Banach. On a

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

si $0 < p, q, \beta < \infty, s \in \mathbb{R}$ et $\alpha > -n/q$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\dot{K}_q^{\alpha,p} B_\beta^s$.

(ii) Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q < \infty, 0 < \beta \leq \infty$ et $\alpha > -n/q$. L'espace de Herz-type Triebel-Lizorkin $\dot{K}_q^{\alpha,p} F_\beta^s$ est un espace quasi-Banach. On a

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p} F_\beta^s \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

si $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q, \beta < \infty$ et $\alpha > -n/q$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\dot{K}_q^{\alpha,p} F_\beta^s$.

Théorème 1.3.4 Soient α_1, α_2 et $s_1, s_2 \in \mathbb{R}, 0 < s, p, q, r, \beta \leq \infty, \alpha_1 > -n/s$ et $\alpha_2 > -n/q$.

Nous supposons que

$$s_1 - n/s - \alpha_1 \leq s_2 - n/q - \alpha_2.$$

(i) Soient $0 < q \leq s \leq \infty$ et $\alpha_2 \geq \alpha_1$ ou

$$0 < s \leq q \leq \infty,$$

et

$$\alpha_2 + n/q \geq \alpha_1 + n/s.$$

Alors

$$\dot{K}_q^{\alpha_2, \theta} B_\beta^{s_2} \hookrightarrow \dot{K}_s^{\alpha_1, r} B_\beta^{s_1},$$

où

$$\theta = \begin{cases} r & \text{si } \alpha_2 + n/q = \alpha_1 + n/s, s \leq q \text{ ou } \alpha_2 = \alpha_1, q \leq s \\ p & \text{si } \alpha_2 + n/q = \alpha_1 + n/s, s \leq q \text{ ou } \alpha_2 > \alpha_1, q \leq s \end{cases}.$$

(ii) Soient $0 < q < s < \infty$ et $\alpha_2 \geq \alpha_1$ ou $0 < s \leq q < \infty$ et

$$\alpha_2 + n/q \geq \alpha_1 + n/s.$$

Alors

$$\dot{K}_q^{\alpha_2,r} F_\theta^{s_2} \hookrightarrow \dot{K}_s^{\alpha_1,p} F_\beta^{s_1},$$

où

$$\theta = \begin{cases} \beta & \text{si } 0 < s \leq q < \infty \text{ et } \alpha_2 + n/q = \alpha_1 + n/s \\ \infty & \text{si non} \end{cases}.$$

Pour la preuve voir [4] et [5].

Chapitre 2

Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces

$$\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^s$$

Dans ce chapitre, on étudie la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Herz-type Besov. Un opérateur pseudo-différentiel avec le symbole a est définie par

$$a(x, D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \mathcal{F}f(\xi) d\xi,$$

où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour une fonction $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, on pose

$$a_j(x, \xi) = \mathcal{F}_{y \rightarrow x}^{-1}(\mathcal{F}\varphi_j(y) \mathcal{F}a(y, \xi)).$$

Soit $0 < \mu \leq \infty$, $1 \leq \lambda \leq \infty$, $r \geq \frac{n}{\mu}$ et $N > \frac{n}{\lambda}$. L'espace $B_{\mu,v}^r(B_{\lambda,\infty}^N)$ est l'ensemble des distributions tempérées $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|a\|_{B_{\mu,v}^r(B_{\lambda,\infty}^N)} = \left\| \left\{ 2^{jr} \|a_j(x, \cdot)\|_{B_{\lambda,\infty}^N(\mathbb{R}^n)} \right\}_j \right\|_{\ell^v(L^\mu)} < \infty.$$

Soit $m, r, N \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq 1$, $0 < \mu \leq \infty$, $r > \frac{n}{\mu}$ et $N > \frac{n}{\lambda}$. On dit qu'un symbole a appartient à $SB_\delta^m(r, \mu, v; N, \lambda)$ si

$$\sup_k 2^{-km} \left\| \left\| a(x, 2^k \cdot) \mathcal{F} \varphi_k(2^k \cdot) \right\|_{B_{\lambda, \infty}^N(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^\infty(dx)} < \infty,$$

$$\sup_k 2^{-k(m+\delta r)} \left\| a(x, 2^k \cdot) \mathcal{F} \varphi_k(2^k \cdot) \right\|_{B_{\mu, v}^r(B_{\lambda, \infty}^N)} < \infty,$$

qui introduit par J. Marschall [18] et [19]. Choisir $\mu = v = N = \lambda = \infty$, ces symboles incluent les classes classiques de Hörmander $S_{1, \delta}^m$. De plus la classe $SB_0^m(r, \mu, v; \infty, 1)$ égale à la classe $\mathcal{S}'(B_{\mu, v}^{(1, \dots, 1), r})^m$ de M. Yamazaki [31]. Remarque que

$$SB_\delta^m(r, \mu, v; N, \lambda) \hookrightarrow SB_{\delta_1}^m(r_1, \mu_1, v; N, \lambda),$$

si $0 < \mu < \mu_1 \leq \infty$, $0 < v \leq \infty$, $r - \frac{n}{\mu} = r_1 - \frac{n}{\mu_1}$ et $\delta r = \delta_1 r_1$.

2.1 Résultats auxiliaires

Le lemme suivant est le $\dot{K}_q^{\alpha, p}$ -version de Franke [7].

Lemme 2.1.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$, $\gamma > 0$ et $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour toute suite $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \mathcal{F} f_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \gamma 2^j\}$ nous avons*

$$\|\omega_l * f_j\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} \leq c 2^{(j-l)\varepsilon} \|f_j\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)},$$

où $\omega_l = 2^{ln} \omega(2^l \cdot)$, $l \leq j \leq \infty$ et $\varepsilon = \max(0, \frac{n}{p} - n)$. La constante $c > 0$ est indépendante de j et l .

Preuve. Supposons d'abord que $1 \leq p \leq \infty$. Comme $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n, N > n$

$$|\omega_l * f_j(x)| \leq c(\eta_{l,N} * |f_j|^q(x))^{\frac{1}{q}}.$$

On a

$$\|\omega_l * f_j\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f_j\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Soit maintenant $0 < p < 1$. En appliquant le lemme 1.2.1, nous avons

$$|f_j(y)| \leq c(\eta_{j,L} * |f_j|^p(y))^{1/p}, \quad L > n, y \in \mathbb{R}^n.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\omega_l * f_j(x)| &\leq c\eta_{l,N} * (\eta_{j,N} * |f_j|^p)^{1/p}(x) \\ &= c \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{l,N}(x-y)(\eta_{j,L} * |f_j|^p(y))^{1/p} dy, \end{aligned}$$

où $c > 0$ est indépendant de j et l , qui peut être récrit par

$$c2^{l(n-\frac{n}{p})} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_{l,N_p}(x-z)\eta_{j,L-N_p}(y-z) |f_j(z)|^p dz \right)^{1/p} dy.$$

Par conséquent, l'inégalité de Minkowski donne

$$\begin{aligned} |\omega_l * f_j(x)| &\leq c2^{(l-j)(n-\frac{n}{p})} \left\| \eta_{j,\frac{L}{p}-N} \right\|_1 (\eta_{l,N_q} * |f_j|^p(x))^{1/p} \\ &\leq c2^{(l-j)(n-\frac{n}{p})} (\eta_{l,N_p} * |f_j|^p(x))^{1/p}, \end{aligned}$$

pour tout L assez grand et tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $N > \max(n, \frac{n}{p})$, donc

$$\begin{aligned} \|\omega_l * f_j\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)} &\leq c 2^{(l-j)(n-\frac{n}{p})} \left\| \eta_{l,N_p} * |f_j|^p \right\|_{\dot{K}_1^{\alpha p, \frac{q}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c 2^{(l-j)(n-\frac{n}{p})} \|f_j\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

La proposition suivante joue un rôle fondamental dans cette section.

Proposition 2.1.1 *Soient $0 < p_1, p_2, q \leq \infty, 0 < \mu \leq \infty$ et $1 \leq \lambda \leq \infty$ avec $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{\mu}$.*

Soit $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ un symbole borné et mesurable tel que

$$\text{supp} a(x, \cdot) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c 2^k\}.$$

Si $p_1 \geq 1$ ou si $0 < p_1 < 1$ et

$$\text{supp} \mathcal{F} f \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c 2^k\},$$

et si $N > n \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p_2} \right\}$, alors

$$\|a(x, D)f\|_{\dot{K}_{p_1}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \|a(\cdot, 2^k \cdot)\|_{B_{\lambda,\infty}^N} \right\|_{\mu} \|f\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, avec une constante c ne dépendant pas de k .

Pour la preuve voir [6].

Définition 2.1.1 *Supposons que f est une fonction localement intégrable sur \mathbb{R}^n , i.e. $f \in L_{loc}^1$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction maximale de Hardy-littlewood $\mathcal{M}f(x)$ est définie par

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

et

$$\mathcal{M}_\sigma(f) := (\mathcal{M}(|f|^\sigma))^{\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 < \sigma < \infty.$$

Lemme 2.1.2 Soient $1 < \beta < \infty$, $1 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. Si $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ est une suite de fonctions localement intégrables sur \mathbb{R}^n et $\frac{n}{p} < \alpha < n(1 - \frac{1}{p})$, alors

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^\infty (\mathcal{M}f_j)^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^\infty |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour la preuve voir [25].

Lemme 2.1.3 Soient $s \in \mathbb{R}$, $A, B > 0$, $0 < p, q \leq \infty$ et $\alpha > -\frac{n}{p}$. Soit $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ une suite des fonctions telles que

$$\text{supp } \mathcal{F}f_0 \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq A\},$$

et

$$\text{supp } \mathcal{F}f_l \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : B2^{l+1} \leq |\xi| \leq A2^{l+1}\}.$$

Il existe une constante $c > 0$ telle que les inégalités suivantes

$$\left\| \sum_{l=0}^\infty f_l \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^s} \leq c \left(\sum_{l=0}^\infty 2^{ls\beta} \|f_l\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}^\beta \right)^{1/\beta}, \quad 0 < p, q < \infty.$$

Preuve. Soit $\{\mathcal{F}\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ la résolution de l'unité. En utilisant les propriétés de support de $\mathcal{F}f_l$ et $\mathcal{F}\varphi_j$, la somme $\varphi_j * \sum_{l=0}^\infty f_l$ deviennent $\sum_{i=-k_1}^{k_2} \varphi_j * f_{j+i}$ pour certains nombres naturels $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. Observez cela

$$|\varphi_j * f_{j+i}| \leq c \mathcal{M}_t |f_{j+i}|,$$

avec $0 < t < \min(p, \frac{1}{\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}})$, donc

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=0}^{\infty} f_l \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_{\beta}^s} &\leq c \sum_{i=-k_1}^{k_2} \left\| \{2^{js} \mathcal{M}_t |f_{j+i}| \}_j \right\|_{\ell^{\beta}(\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq c \sum_{i=-k_1}^{k_2} \left\| \{2^{js} f_{j+i}\}_j \right\|_{\ell^{\beta}(\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n))}, \end{aligned}$$

par lemme 2.1.2 ■

Nous avons besoin des inégalités de Marschall, voir [18].

Lemme 2.1.4 *Soit $A > 0$ et $R \geq 1$. Soit $b \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et la fonction $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$\text{supp } \mathcal{F}f \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq AR\} \text{ et } \text{supp } b \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq A\}.$$

Alors

$$|\mathcal{F}^{-1}b * f(x)| \leq c 2^{(1-\frac{1}{t})jn} (AR)^{\frac{n}{t}-n} \|b(2^j \cdot)\|_{B_{1,t}^{\frac{n}{t}}} \mathcal{M}_t(f)(x),$$

pour tout $0 < t \leq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ où c est indépendant de A, R, b, j et f .

Lemme 2.1.5 *Soient $A, B > 0, 0 < p, q, \beta \leq \infty$ et $\alpha > -\frac{n}{p}$. Soit $s > n(\max\{1, 1/p\} - 1)$.*

Soit $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions telle que

$$\text{supp } \mathcal{F}f_l \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq A 2^{l+1}\}.$$

On a

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} f_l \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_{\beta}^s} \leq c \left\| \{2^{ls} f_l\}_l \right\|_{\ell^{\beta}(\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n))}, \quad 0 < p, q < \infty.$$

Pour la preuve voir [1] et [6].

Lemme 2.1.6 Soient $A > 0, 0 < p, q \leq \infty$ et $\alpha > -\frac{n}{p}$. Soit $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions tel que

$$\text{supp } \mathcal{F}f_l \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq A2^{l+1}\}.$$

Soit $s = n (\max\{1, 1/p\} - 1)$. Alors il reste que pour une constante $c > 0$

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} f_l \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_{\beta}^s} \leq c \left\| \{2^{ls} f_l\}_l \right\|_{\ell^{\min(1, p, q)}(\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n))}. \quad (2.1.1)$$

De plus, si le côté droit de 2.1.1 est fini, alors $\left\{ \sum_{l=0}^N f_l \right\}_N$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Pour la preuve voir [6].

2.2 Principaux résultats

Le théorème suivant concernant la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Herz-type Besov.

Théorème 2.2.1 Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q, \beta \leq \infty$ et $\alpha > -\frac{n}{p}$. Soit $a \in SB_{\delta}^m(r, \mu, v; N, \lambda)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que $0 < \mu, v \leq \infty, r > 0, (1 - \delta)r \geq \frac{n}{\mu}$ et $1 \leq \lambda \leq \infty$. Soit $N > n \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}\right\}$.

(i) Si

$$n \max\left\{1, \frac{1}{\mu} + \frac{1}{p}\right\} - n - (1 - \delta)r < s < r - n \max\left\{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}, 0\right\},$$

alors $a(x, D)f(x)$ est une application linéaire continue de $\dot{K}_p^{\alpha, q} B_{\beta}^{s+m}$ à $\dot{K}_p^{\alpha, q} B_{\beta}^s$.

(ii) Si $(1 - \delta)r \geq \frac{n}{\mu}, v \leq q \leq \infty$ et

$$s := r - n \max\left\{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}, 0\right\},$$

alors $a(x, D)f(x)$ est une application linéaire continue de $\dot{K}_p^{\alpha, q} B_{\beta}^{s+m}$ à $\dot{K}_p^{\alpha, q} B_{\beta}^s$.

(iii) Si $(1 - \delta)r \geq \frac{n}{\mu}$, $0 < \beta \leq \min\{1, p, q\}$ et

$$s := n \max\{1, \frac{1}{\mu} + \frac{1}{p}\} - n - (1 - \delta)r,$$

alors $a(x, D)f(x)$ est une application linéaire continue de $\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}$ à $\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s$.

Preuve. Soit $\{\mathcal{F}\varphi_k\}_k$ une résolution d'unité. Nous fixons

$$a_{j,k}(x, \xi) = \mathcal{F}_{\eta \rightarrow x}^{-1}(\mathcal{F}\varphi_j(\eta) \mathcal{F}_{x \rightarrow \eta} a(\cdot, \xi)) \mathcal{F}\varphi_k(\xi).$$

Nous décomposons le symbole en trois parties

$$a(x, \xi) = a^{(1)}(x, \xi) + a^{(2)}(x, \xi) + a^{(3)}(x, \xi),$$

où

$$a^{(1)}(x, \xi) = \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-4} a_{j,k}(x, \xi),$$

$$a^{(2)}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, \xi),$$

$$a^{(3)}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+4}^{\infty} a_{j,k}(x, \xi).$$

Comme dans Marschall [35], il suffit d'estimer $a^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ dans les espaces $\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s$.

Étape 1. Preuve de (i).

Sous-étape 1.1. Nous allons prouver dans cette étape qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|a^{(1)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}}.$$

Observez que $\sum_{j=0}^{k-4} a_{j,k}(x; D) f_k$ a son spectre en $\{\xi \in \mathbb{R}^n : c_1 2^k \leq |\xi| \leq c_2 2^k\}$. Ensuite nous peut appliquer le lemme 2.1.3 pour obtenir

$$\|a^{(1)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^s} \leq c \left\| \left\{ 2^{ks} \sum_{j=0}^{k-4} a_{j,k}(x, D) f_k \right\}_k \right\|_{\ell^\beta(\dot{K}_p^{\alpha,q})},$$

où $f_k := \varphi_k * f$. Montrons que la dernière quasi-norme est borné par

$$c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^{s+m}}.$$

Par la proposition 2.1.1

$$\begin{aligned} \left\| 2^{ks} \sum_{j=0}^{k-4} a_{j,k}(x, D) f_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}} &\leq c \left\| \left\| \sum_{j=0}^{k-4} a_{j,k}(\cdot, 2^k \cdot) \right\|_{(B_{\lambda,\infty}^N)_\mu} \right\|_\mu \|2^{ks} f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}} \\ &\leq c 2^{k(s+m)} \|f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}}, \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Prendre la ℓ^β -quasi-norme et obtenir que

$$\|a^{(1)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^s} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^{s+m}}.$$

Sous-étape 1.2. Nous allons prouver dans cette étape qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^s} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^{s+m}}.$$

Observez que $\sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, D) f_k$ a son spectre en $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c_2 2^k\}$. Soit $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{p}$.

Comme $(1 - \delta)r \geq \frac{n}{\mu}$, nous avons l'inclusion de Sobolev

$$\dot{K}_{p_1}^{\alpha,q} B_\beta^{s+(1-\delta)r} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^{s+(1-\delta)r - \frac{n}{\mu}} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^s.$$

Par le lemme 2.1.5,

$$\|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} \leq c \left\| \left\{ 2^{k(s+(1-\delta)r)} \sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, D) f_k \right\}_k \right\|_{\ell^\beta(\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q})}.$$

Montrons que la dernière quasi-norme est borné par

$$c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}}.$$

Soit

$$H = \left\| 2^{k(s+(1-\delta)r)} \sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, D) f_k \right\|_{\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q}} \lesssim 1.$$

Par la proposition 2.1.1

$$\begin{aligned} H &\leq c 2^{k(1-\delta)r} \left\| \left\| \sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(\cdot, 2^k \cdot) \right\|_{B_{\lambda, \infty}^N} \right\|_{\mu} \|2^{ks} f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}} \\ &\leq c \|2^{k(s+m)} f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}}, \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Prendre la ℓ^β -quasi-norme d'obtenir que

$$\|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}}.$$

Sous-étape 1.3. Nous allons prouver dans cette étape qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|a^{(3)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}}.$$

Nous pouvons appliquer le lemme 2.1.3 pour obtenir

$$\|a^{(3)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} \leq c \left\| \left\{ 2^{ks} \sum_{k=0}^{j-4} a_{j,k}(x, D)f_k \right\}_k \right\|_{\ell^\beta(\dot{K}_p^{\alpha, q})}.$$

Montrons que la dernière quasi-norme est borné par $c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}}$. Nous définissons $\mu_1 = \max(\mu, p)$. Soit $r_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que $r - \frac{n}{\mu} = r_1 - \frac{n}{\mu_1}$ et $\delta r = \delta_1 r_1$. Soit $0 < \sigma < \min(1, p, q)$. Alors

$$\left\| 2^{js} \sum_{k=0}^{j-4} a_{j,k}(x, D)f_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}}^\sigma \leq \sum_{k=0}^{j-4} \|2^{js} a_{j,k}(x, D)f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}}^\sigma.$$

Prouvons que

$$\|2^{ks+(j-k)r_1} a_{j,k}(x, D)f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}} \leq c \|2^{k(s+m+(1-\delta_1)r_1)} f_k\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha, q}},$$

où $\frac{1}{p} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{p_2}$ et $0 \leq k \leq j-4$. Observez que f_k et $a_{j,k}(x, D)$ ont son spectre dans $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c_2 2^k\}$, par la proposition 2.1.1 et comme $a \in SB_\delta^m(r, \mu, v; N, \lambda)$, $v \leq q < \infty$ et $s = r_1$,

$$\sum_{j=k+4}^{\infty} 2^{js\beta} \left\| \|a_{j,k}(\cdot, 2^k \cdot) f_k\|_{B_{\lambda, \infty}^N} \right\|_{\mu_1}^\beta \leq 2^{k(m+\delta_1 r_1)\beta}, \quad (2.2.1)$$

le côté droite est borné par

$$c \left\| \|2^{jr_1} a_{j,k}(\cdot, 2^k \cdot) f_k\|_{B_{\lambda, \infty}^N} \right\|_{\mu_1} \|2^{k(s-r_1)} f_k\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha, q}} \leq c \|2^{k(s+m-(1-\delta_1)r_1)} f_k\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha, q}}.$$

L'estimation souhaitée suit par la proposition 2.1.1 et les inclusions

$$\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q} B_\beta^{s+m} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m-(1-\delta)r+\frac{n}{\mu}} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m-(1-\delta_1)r_1}.$$

Étape 2. Preuve de (ii). Il suffit d'estimer $a^{(3)}(x, D)$. Soient μ_1 , r_1 et δ_1 comme dans

Sous-étape 1.3. Soit $\varrho = \min(1, p, q, \beta)$. Si $v \leq q < 1$, alors

$$\begin{aligned} \|a^{(3)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+4}^{\infty} a_{j,k}(x, D)f_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} \\ &\leq c \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{j=k+4}^{\infty} a_{j,k}(x, D)f_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s}^\varrho \right)^{\frac{1}{\varrho}}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1.3 et la proposition 2.1.1 nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=k+4}^{\infty} a_{j,k}(x, D)f_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s}^\beta &\leq c \sum_{j=k+4}^{\infty} \|2^{js} a_{j,k}(x, D)f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}}^\beta \\ &\leq c \|f_k\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha, q}}^\beta \sum_{j=k+4}^{\infty} 2^{js\beta} \left\| \|a_{j,k}(\cdot, 2^k \cdot)\|_{B_{\lambda, \infty}^N} \right\|_{\mu_1}^\beta. \end{aligned}$$

D'après 2.2.1, donc

$$\begin{aligned} \|a^{(3)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} &\leq c \|f\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha, q} B_\varrho^{m+\delta_1 r_1}} \\ &= c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\varrho^{s+m+\frac{n}{\mu}-(1-\delta)r-\frac{n}{\mu_1}}} \\ &\leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\varrho^{s+m+\frac{n}{\mu}-(1-\delta)r}} \\ &\leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}}, \end{aligned}$$

car $(1-\delta)r > \frac{n}{\mu}$.

Étape 3. Preuve de (iii). Il suffit d'estimer $a^{(2)}(x, D)$. Considérons deux cas.

Cas 1. $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{p} \leq 1$. Soit $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{p}$ et $\mu_1 = \mu$. Alors nous avons

$$\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q} B_\beta^0 \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha, q} B_\infty^{s+(1-\delta)r-\frac{n}{\mu}} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s.$$

En appliquant le lemme 2.1.6, on obtient

$$\begin{aligned} \|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} &\leq c \|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q} B_\infty^0} \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k-3}^{k+3} \|a_{j,k}(x, D)f_k\|_{\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q}}. \end{aligned}$$

Par la proposition 2.1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{j=k-3}^{k+3} \|a_{j,k}(x, D)f_k\|_{\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q}} &\leq c \sum_{j=k-3}^{k+3} \left\| \|a_{j,k}(\cdot, 2^k \cdot)\|_{B_{\lambda, \infty}^N} \right\|_{\mu} \|f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}} \\ &\leq c 2^{k(m-(1-\delta)r)} \|f_k\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|a^{(2)}(x, D)f\| &\leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_1^{m-(1-\delta)r}} \\ &= c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}}, \end{aligned}$$

où $s = -(1-\delta)r$.

Cas 2. $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{p} \leq 1$. Soit $p_1 = \min(1, p)$ et

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu, & \text{si } p \leq \mu, \\ \max(1, \mu), & \text{si } p > \mu \end{cases}.$$

Observe que

$$\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q} B_\infty^{\frac{n}{p_1} - n} = \dot{K}_p^{\alpha, q} B_\infty^{s+(1-\delta)r - \frac{n}{\mu}} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha, q} B_\infty^s.$$

Soit $r_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que $r - \frac{n}{\mu} = r_1 - \frac{n}{\mu_1}$ et $\delta r = \delta_1 r_1$. Soit $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{p_2}$. Alors $a \in SB_\delta^m(r, \mu, v; N, \lambda)$ et

$$s - \frac{n}{p} = \frac{n}{p_1} - n - (1 - \delta_1)r_1 - \frac{n}{p_2}.$$

Soit $\rho = \min(1, p_1)$. Observez cela si $p \geq 1$ alors $\rho = p_1 = 1$ et si $0 < p < 1$, alors $\rho = p_1 = p$.

Donc

$$s - \frac{n}{p} = \frac{n}{\rho} - n - (1 - \delta_1)r_1 - \frac{n}{p_2}.$$

et $p_2 \geq p$. En appliquant à nouveau le lemme 2.1.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\infty^s} &\leq \|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q} B_\infty^{\frac{n}{\rho} - n}} \\ &\leq c \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\frac{n}{\rho} - n)\sigma} \sum_{j=k-3}^{k+3} \|a_{j,k}(x, D)f_k\|_{\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q}}^\sigma \right)^{1/\sigma} \\ &\leq c \|f\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha, q} B_\sigma^{m + \frac{n}{\rho} - n - (1 - \delta_1)r_1}}, \end{aligned}$$

par la proposition 2.1.1, où $\sigma = \min(1, p_1, q)$. Notre estimation suit l'inclusion de Sobolev

$$\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m} \hookrightarrow \dot{K}_{p_2}^{\alpha, q} B_\sigma^{m + \frac{n}{\rho} - n - (1 - \delta_1)r_1}.$$

La preuve est terminée. ■

Chapitre 3

Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces

$$\dot{K}_p^{\alpha,q} F_\beta^s$$

Dans ce chapitre, on étudie la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Herz-type Triebel-Lizorkin. Soit $\{\mathcal{F}\varphi_j\}_j$ une résolution d'unité. Pour une fonction $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, nous écrivons

$$a_j(x, \xi) = \mathcal{F}_{y \rightarrow x}^{-1}(\mathcal{F}\varphi_j(y)\mathcal{F}a(y, \xi)).$$

Soit $0 < \mu < \infty$, $0 < v \leq \infty$, $1 \leq \lambda \leq \infty$, $0 \leq \delta \leq 1$, $(1 - \delta)r \geq \frac{n}{\mu}$ et $N > \frac{n}{\lambda}$. L'espace $F_{\mu,v}^r(B_{\lambda,\infty}^N)$ est l'ensemble des distributions tempérées $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|a\|_{F_{\mu,v}^r(B_{\lambda,\infty}^N)} = \left\| \left\{ 2^{jr} \|a_j(x, \cdot)\|_{B_{\lambda,\infty}^N} \right\}_j \right\|_{L^\mu(\ell^v)} < \infty.$$

Soit $m, r, N \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq 1$, $0 < \mu < \infty$, $0 < v \leq \infty$, $1 \leq \lambda \leq \infty$ $(1 - \delta)r \geq \frac{n}{\mu}$ et $N > \frac{n}{\lambda}$.

On dit qu'un symbole a appartient à $SF_\delta^m(r, \mu, v; N, \lambda)$ si

$$\sup_k 2^{-km} \left\| \left\| a(x, 2^k \cdot) \mathcal{F} \varphi_k(2^k \cdot) \right\|_{B_{\lambda, \infty}^N} \right\|_{L^\infty(dx)} < \infty,$$

$$\sup_k 2^{-k(m+\delta r)} \left\| a(x, 2^k \cdot) \mathcal{F} \varphi_k(2^k \cdot) \right\|_{F_{\mu, v}^r(B_{\lambda, \infty}^N)} < \infty,$$

qui introduit par J. Marschall [18]. Remarque que

$$SF_\delta^m(r, \mu, v; N, \lambda) \hookrightarrow SF_{\delta_1}^m(r_1, \mu_1, v; N, \lambda), \quad (3.0.1)$$

si $0 < \mu < \mu_1 \leq \infty$, $0 < v \leq \infty$, $r - \frac{n}{\mu} = r_1 - \frac{n}{\mu_1}$ et $\delta r = \delta_1 r_1$.

3.1 Résultats auxiliaires

Lemme 3.1.1 *Soit $0 < a < 1$ et $0 < q \leq \infty$. Soit $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ une suite de nombres réels positifs, tels que $\|\{\varepsilon_k\}_k\|_{\ell^q} = I < \infty$. La suite*

$$\left\{ \delta_k : \delta_k = \sum_{j=0}^{\infty} a^{|k-j|} \varepsilon_j \right\}_{k \in \mathbb{N}_0},$$

dans ℓ^q et

$$\|\{\delta_k\}_k\|_{\ell^q} \leq cI.$$

avec c ne dépend pas de a et q .

Lemme 3.1.2 *Soit $s \in \mathbb{R}$, $A, B > 0$, $0 < p, q \leq \infty$ et $\alpha > -\frac{n}{p}$. Soit $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ une suite des fonctions telles que*

$$\text{supp } \mathcal{F} f_0 \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq A\},$$

et

$$\text{supp } \mathcal{F}f_l \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : B2^{l+1} \leq |\xi| \leq A2^{l+1}\}.$$

Il existe une constante $c > 0$ telle que les inégalités suivantes

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} f_l \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} F_{\beta}^s} \leq c \left\| \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{ls\beta} |f_l|^{\beta} \right)^{1/\beta} \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 < p, q < \infty.$$

Pour la preuve voir [1] et [6].

Proposition 3.1.1 Soit $0 < p_1, p_2, q \leq \infty, 0 < \mu \leq \infty$ et $1 \leq \lambda \leq \infty$ avec $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{\mu}$.

Soit $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ un symbole borné et mesurable tel que

$$\text{supp } a(x, \cdot) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c2^k\}.$$

Si $p_1 \geq 1$ ou si $0 < p_1 < 1$ et

$$\text{supp } \mathcal{F}f \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c2^k\},$$

et si $N > n \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p_2} \right\}$, alors

$$|a(x, D)f(x)| \leq c \|a(\cdot, 2^k \cdot)\|_{B_{\lambda,\infty}^N} \mathcal{M}_{\tau} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, avec la constante implicite ne dépendant pas de k .

Pour la preuve voir [19].

Lemme 3.1.3 Soit $A, B > 0, 0 < p, q, \beta \leq \infty$ et $\alpha > -\frac{n}{p}$. Soit $s > n(\max\{1, 1/p\} - 1)$.

Soit $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ soit une suite de fonctions telle que

$$\text{supp } \mathcal{F}f_l \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq A2^{l+1}\}.$$

Puis il tient que

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} f_l \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} F_{\beta}^s} \lesssim c \left\| \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{ls\beta} |f_l|^{\beta} \right)^{1/\beta} \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 < p, q < \infty.$$

Pour la preuve voir [1] et [6].

3.2 Principaux résultats

Nous présentons un théorème décrivant la continuité des opérateurs pseudo-différentiels dans $\dot{K}_p^{\alpha,q} F_{\beta}^s$.

Théorème 3.2.1 *Soit $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$, $0 < \beta \leq \infty$ et $\alpha > -\frac{n}{p}$. Soit $a \in SF_{\delta}^m(r, \mu, v; N, \lambda)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que $0 < \mu, v \leq \infty$, $r > 0$, $(1 - \delta)r \geq \frac{n}{\mu}$ et $1 \leq \lambda \leq \infty$. Soit $N > n \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}, \frac{1}{\beta} \right\}$, et*

$$n \max \left\{ 1, \frac{1}{\mu} + \frac{1}{p} \right\} - n - (1 - \delta)r < s < r - n \max \left\{ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}, 0 \right\},$$

alors $a(x, D)f(x)$ est une application linéaire continue de $\dot{K}_p^{\alpha,q} F_{\beta}^{s+m}$ à $\dot{K}_p^{\alpha,q} F_{\beta}^s$.

Preuve. Soit $\{\mathcal{F}\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ une résolution de d'unité.

$$a_{j,k}(x, \xi) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi_j(\eta)\mathcal{F}_x a(\cdot, \xi))\mathcal{F}\varphi_k(\xi).$$

Nous décomposons le symbole en trois parties

$$a(x, \xi) = a^{(1)}(x, \xi) + a^{(2)}(x, \xi) + a^{(3)}(x, \xi),$$

où

$$a^{(1)}(x, \xi) = \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-4} a_{j,k}(x, \xi),$$

$$a^{(2)}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, \xi),$$

$$a^{(3)}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+4}^{\infty} a_{j,k}(x, \xi).$$

Étape 1. Nous montrerons dans cette étape qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|a^{(1)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} F_\beta^s} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} F_\beta^{s+m}}. \quad (3.2.1)$$

Observez que $\sum_{j=0}^{k-4} a_{j,k}(x, D) f_k$ a son spectre en $\{\xi \in \mathbb{R}^n : c_1 2^k \leq |\xi| \leq c_2 2^k\}$, où $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ sont indépendants de k . Ensuite, nous pouvons appliquer le lemme 3.1.2 pour obtenir

$$\|a^{(1)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} F_\beta^s} \leq c \left\| \left\{ 2^{ks} \sum_{j=0}^{k-4} a_{j,k}(x, D) f_k \right\}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\ell^\beta)},$$

où $f_k := \varphi_k * f$. Montrons que la dernière quasi-norme est bornée par

$$c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} B_\beta^{s+m}}.$$

Selon la proposition 3.1.1, le côté gauche ne dépasse pas le lemme 2.1.2

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ \mathcal{M}_\tau(2^{k(s+m)} f_k) \right\}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\ell^\beta)} &\leq c \left\| \left\{ 2^{k(s+m)} f_k \right\}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\ell^\beta)} \\ &\leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q} F_\beta^{s+m}}, \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\tau} = \max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}, \frac{1}{\beta}\}$. Ceci termine la preuve de 3.2.1.

Étape 2. Nous montrerons dans cette étape qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}F_\beta^s} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}F_\beta^{s+m}}.$$

Nous avons $\sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, D) f_k$ a son spectre en $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c_2 2^k\}$ où c_2 indépendant de k . Soit $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{p}$. Depuis $(1-\delta)r \geq \frac{n}{\mu}$, nous avons l'inclusion

$$\dot{K}_{p_1}^{\alpha,q}F_\beta^{s+(1-\delta)r} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha,q}F_\beta^{s+(1-\delta)r-\frac{n}{\mu}} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha,q}F_\beta^s.$$

voir le théorème 1.3.4. Par le lemme 3.1.3, ce qui est possible puisque $s > n \max\{1, \frac{1}{\mu} + \frac{1}{p}\} - n - (1-\delta)r$,

$$\|a^{(3)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}F_\beta^s} \leq \left\| \left\{ 2^{k(s+(1-\delta)r)} \sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, D) f_k \right\}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\ell^\beta)}.$$

On a

$$\begin{aligned} & \left| 2^{k(s+(1-\delta)r)} \sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, D) f_k(x) \right| \\ & \leq c \sup_k 2^{k((1-\delta)r-m)} \left\| \sum_{j=k-3}^{k+3} a_{j,k}(x, 2^k \cdot) \right\|_{B_{\lambda,\infty}^N} \mathcal{M}_\tau(2^{k(s+m)} f_k)(x), \end{aligned}$$

par la proposition 3.1.1 avec $\delta > n$. Prendre la norme ℓ^∞ et ensuite le $\dot{K}_p^{\alpha,q}$ norme nous obtenons par l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned} \|a^{(2)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}F_\beta^s} & \leq c \left\| \{ \mathcal{M}_\tau(2^{k(s+m)} f_k) \}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\ell^\beta)} \\ & \leq c \left\| \{ 2^{k(s+m)} f_k \}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\ell^\beta)} \\ & \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}F_\beta^{s+m}}, \end{aligned}$$

par le lemme 2.1.2, avec $\frac{1}{\tau} = \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}, \frac{1}{\beta})$.

Etape 3. Nous allons prouver dans cette étape qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|a^{(3)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^s} \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} B_\beta^{s+m}}.$$

On peut appliquer le lemme 3.1.2, ce qui est possible puisque $s < r - n \max\{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}, 0\}$, obtenir

$$\|a^{(3)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} F_\beta^s} \leq c \left\| \left\{ 2^{js} \sum_{k=0}^{j-4} a_{j,k}(x, D)f_k \right\}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\ell^\beta)}.$$

Nous définissons $\mu_1 = \max(\mu, p)$. Soit $r_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que $r - \frac{n}{\mu} = r_1 - \frac{n}{\mu_1}$ et $\delta r = \delta_1 r_1$. Alors

$$r_1 = r - n \max\left\{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}, 0\right\},$$

et

$$SB_\delta^m(r, \mu, v; N, \lambda) \hookrightarrow SF_{\delta_1}^m(r_1, \mu_1, v; N, \lambda),$$

voir 3.0.1. Par la proposition 3.1.1,

$$\begin{aligned} |2^{ks} a_{j,k}(x, D)f_k(x)| &\leq C_N \|a_{j,k}(x, 2^k \cdot)\|_{B_{\lambda, \infty}^N} \mathcal{M}_\tau(2^{ks} f_k)(x) \\ &\leq C_N 2^{-r_1 j} \sup_i \|2^{r_1 i} a_{i,k}(x, 2^k \cdot)\|_{B_{\lambda, \infty}^N} \mathcal{M}_\tau(2^{ks} f_k)(x), \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit

$$g_k = \mathcal{M}_\tau(2^{ks} f_k) \quad k \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le lemme 3.1.1 on obtien

$$\|a^{(3)}(x, D)f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} F_\beta^s},$$

peut être estimé par

$$\begin{aligned}
& c \left\| \left\{ \sup_i \left\| 2^{r_1 i} a_{i,k}(x, 2^k \cdot) \right\|_{B_{\lambda, \infty}^N(\mathbb{R}^n)} 2^{-kr_1} g_k \right\}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\ell^\beta)} \\
& \leq c \left\| \left\{ 2^{-k(m+\delta_1 r_1)} \sup_i \left\| 2^{r_1 i} a_{i,k}(x, 2^k \cdot) \right\|_{B_{\lambda, \infty}^N(\mathbb{R}^n)} 2^{k(m-(1-\delta_1)r_1)} g_k \right\}_k \right\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\ell^\beta)}.
\end{aligned}$$

Soit $\frac{1}{p} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{p_2}$ et en appliquant l'inégalité de Hölder, nous estimons le dernier terme par

$$\begin{aligned}
\left\| \left\{ \mathcal{M}_\tau(2^{k(s+m-(1-\delta_1)r_1)\tau} f_k) \right\}_k \right\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha, q}(\ell^\beta)} & \leq c \left\| \left\{ (2^{k(s+m-(1-\delta_1)r_1)\tau} |f_k|^\tau)^{\frac{1}{\tau}} \right\}_k \right\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha, q}(\ell^\beta)} \\
& \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} F_\beta^{s+m-(1-\delta_1)r_1}(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq c \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q} F_\beta^{s+m}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme 1.2.1 et l'inclusion

$$\dot{K}_{p_1}^{\alpha, q} F_\beta^{s+m} \hookrightarrow \dot{K}_p^{\alpha, q} F_\beta^{s+m-(1-\delta)r_1}.$$

La preuve est terminée. ■

Bibliographie

- [1] Djeriou A, Drihem, D. : On the continuity of pseudo-differential operators on multiplier spaces associated to Herz-type Triebel-Lizorkin spaces, Mediterranean Journal of Mathematics, accepted.
- [2] Bourdaud, G. : Une algebre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels. Comm. Partial Diff. Eq. **13**, 1059-1083 (1988).
- [3] Coifman, R.R., Meyer, Y. : Au delà des opérateurs pseudo-différentiels volume 57 of Astérisque. Société mathématique de France, Paris (1978).
- [4] D. Drihem. : Embeddings properties on Herz-type Besov and Triebel-Lizorkin spaces, Math. Ineq and Appl. **16**(2), 439-460 (2013).
- [5] D. Drihem. : Sobolev embeddings for Herz-type Triebel-Lizorkin spaces, Function Spaces and Inequalities (P. Jain and H.-J. Schmeisser, eds.), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Springer, 2017.
- [6] Drihem, D. : Boundedness of non regular pseudodifferential operators on Herz-type Besov-Triebel-Lizorkin spaces.
- [7] Franke, J. : On the spaces $F_{p,q}^s$ of Triebel-Lizorkin type : pointwise multipliers and spaces on domains. Math Nachr. **125**, 29-68 (1986).
- [8] Grafakos. L. : Classical Fourier Analysis, Third edition, Graduate Texts in Math., no 249, Springer, New York, (2014).

- [9] C. Herz. : Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, J. Math. Mech. **18**, 283-324 (1968).
- [10] Hörmander, L. : Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. In Singular integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. X, Chicago, Ill., 1966), pages 138-183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I (1966).
- [11] Hörmander, L. : On the L^2 continuity of pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. **24**, 529-535 (1971).
- [12] X. Li and D. Yang. : Boundedness of some sublinear operators on Herz spaces, Illinois J. Math. **40**, 484-501 (1996).
- [13] S. Lu and D. Yang. : The local versions of $H^p(\mathbb{R}^n)$ spaces at the origin, Studia Math. **116**, 103-131 (1995).
- [14] S. Lu and D. Yang. : The decomposition of the weighted Herz spaces on \mathbb{R}^n and its applications, Sci.in China (Ser. A). **38**, 147-158 (1995).
- [15] S. Lu and D. Yang. : Herz-type Sobolev and Bessel potential spaces and their applications, Sci. in China (Ser. A). **40**, 113-129 (1997).
- [16] S. Lu, D. Yang and G. Hu. : Herz type spaces and their applications, Beijing : Science Press, 2008.
- [17] Marschall, J. : Weighted L^p -estimates for pseudo-differential operators with nonregular symbols. Z. Anal. Anwend. **10**, 493-501 (1991).
- [18] Marschall, J. : Weighted parabolic Triebel spaces of product type. Fourier multipliers and pseudo-differential operators. Forum. Math. **3**, 479-511 (1991).
- [19] Marschall, J. : Nonregular pseudo-differential operators. Z. Anal. Anwend. **15**(1), 109-148 (1996).
- [20] Runst, T. : Pseudo-differential operators of the exotic class $S_{1,1}^0$ in spaces of Besov and Triebel-Lizorkin type. Annals Global Analysis Geometry. **3**, 13-28 (1985).

- [21] Schmeisser, H-J, Triebel, H. : Topics in Fourier analysis and function spaces. Leipzig : Geets and Portig and Chicester : Wiley (1987).
- [22] Stein, E. : Harmonic analysis Real variable methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1993).
- [23] Triebel, H. : Theory of function spaces. Birkhäuser, Basel (1983).
- [24] Taylor, M.E. : Pseudodifferential operators and nonlinear PDE. Progress in Math. 100, Birkhauser, Boston (1991).
- [25] Tang, L., Yang, D. : Boundedness of vector-valued operators on weighted Herz spaces, Approx. Th. & its Appl. 16, 58-70 (2000).
- [26] J. Xu and D. Yang. : Applications of Herz-type Triebel-Lizorkin spaces, Acta. Math. Sci (Ser. B). **23**, 328-338 (2003).
- [27] J. Xu and D. Yang. : Herz-type Triebel-Lizorkin spaces, I, Acta Math. Sci (English Ed.). **21**(3), 643-654 (2005).
- [28] J. Xu. : Pointwise multipliers of Herz-type Besov spaces and their applications, Appl. Math. **17**(1), 115-121 (2004).
- [29] J. Xu. : Equivalent norms of Herz type Besov and Triebel-Lizorkin spaces, J Funct Spaces Appl. **3**, 17-31 (2005).
- [30] J. Xu. : Decompositions of non-homogeneous Herz-type Besov and Triebel-Lizorkin spaces, Sci. China. Math. **47**(2), 315-331 (2014).
- [31] Yamazaki, M. : A quasi-homogenous version of paradifferential operators. Parts I and II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. **33**, 131-174 and 311-345 (1986).
- [32] Wong, M.W. : An Introduction to pseudo-differential operators. World Scientific, (1991).